161 : Distance - isométrie d'un espace affine.

I) Distance dans un espace euclidien : (E espace affine euclidien)

A) Notion de distance :

[TAU] p. 57 - 59

Prop1 : $d : \begin{cases} E\times E \to \mathbb{R}^+ \\ (M,P) \mapsto \|\overrightarrow{MP}\| \end{cases}$ (où $\|.\|$ norme eucli sur $\vec{E}$) est une distance sur E. Elle est invariante par translation

Ex1 : Avec 2 vect. de $\mathbb{R}^3$... + rem1 : on a une espace métrique donc on peut définir des boules, adhérence...

Déf2 : $M\in E$, A,B parties non vides de E, $d(M,A)$; $d(A,B) = \dots$

Prop3 : · $M \mapsto d(M,A)$ est 1-lip

· $d(M,A) = 0 \iff M\in \bar{A}$; $d(A,B) = 0 \iff \bar{A}\cap\bar{B} \neq \emptyset$

B) Déterminant - matrice de Gram :

→ déf mat/dét (e_a) Thm $\vec{E}$) [GOU]

puis 4.4. [TAU]

[GOU] p. 274

Déf4 : mat + dét de Gram sur $\vec{E}$

Ex5 : Si (e_i) b.o.n $\mathrm{Mat}_G(e_i) = I_n$

Prop6 : Une mat. de Gram sur $\vec{E}$ eucli est sym ≥ 0 ; et déf $\iff (x_i)$ libre.

THM7 : $\vec{V} < \vec{E}$ où une base (pas forcément o.n.) de $\vec{V}$ est $(e_1,\dots,e_p)$

$\forall x\in V$, $d(x,V)^2 = \dfrac{G(e_1,\dots,e_p,x)}{G(e_1,\dots,e_p)}$

THM8 : F ss-espace affine de E, $A\in E$.

· $\pi_F(A)$ est l'unique pt $P\in F$ tq $\underbrace{d(A,P)}_{\|\overrightarrow{AP}\|} = d(A,F)$ (où $\pi_F(A)$ = project° affine ⊥ de A sur F)

($\overrightarrow{\pi_F} = p_F$)

· $\forall P\in F$, et $(\vec{e_1},\dots,\vec{e_p})$ base de $\vec{F}$, $d^2(A,F) = \dfrac{G(\overrightarrow{AP}, e_1,\dots,e_p)}{G(e_1,\dots,e_p)}$

[TAU] p. 60 - 62

Cor9 : $F<E$, $P,Q\in E$

· Si $\overrightarrow{PQ}\in \vec{F}$, $d(P,F) = d(Q,F)$

· Si $G<E$ faiblement // à F, si $M,N\in G$, $d(M,F) = d(N,F)$.

[Thm juste après ? 4.4.4] je pense pas

($O\in E$, $(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})$ b.o.n de $\vec{E}$)

Ex10 : Si H est un hyperplan affine d'éq : $A = O + x_1e_1+\dots+x_ne_n \in H \iff \alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n + \beta = 0$

Alors $B = O + y_1e_1+\dots+y_ne_n$ vérifie : $d(B,H) = \dfrac{|\alpha_1y_1+\dots+\alpha_ny_n+\beta|}{\sqrt{\alpha_1^2+\dots+\alpha_n^2}}$

Mais ça utilise $\|\overrightarrow{\pi_H(B)B}\| =$ ↑

bon ça utilise pas les dét/Mat de Gram

II) Isométries vectorielles et affines : $(\vec{E}, \langle .|. \rangle)$ esp vect eucl ! E espace affine eucli associé

A) Grpe des isom. vectorielles et réd

[MER] p. 141 - 154

Déf11 isométrie vect = appli orthog. ⇝ $O(\vec{E})$

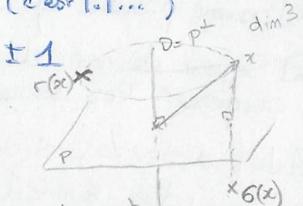
THM12 $u : \vec{E}\to\vec{E}$ orthog $\iff$ plein d'éq

Rem13 $u : x \mapsto x\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) + -x\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(x)$ conserve la norme mais non linéaire (c'est $|.|$...)

Déf14 Matrice ⊥, $O_n(\mathbb{R})$

Prop15 : $O(\vec{E}) < (GL(\vec{E}), \circ)$, + $u\in O(\vec{E}) \Rightarrow \det u = \pm 1$

Déf16 : $SO(\vec{E})$ ← ss-grpe distingué de $O(\vec{E})$. (+ $SO_n(\mathbb{R})$)



Ex17 Matrice de passage entre 2 b.o.n $\in O_n(\mathbb{R})$

· project° ⊥ $\notin O(\vec{E})$ en général (m pas inversible)

r retournement
σ réflexion

Ex18 sym. p/r à F // à G orthog. $\iff G = F^\perp$

· ~~déf~~ ↳ donner déf réflexion + retournement (+ dessin annexe)

[PER] [FGA]

THM19 Générateurs de $O(\vec{E})$

Cor20 Gén. de $SO(\vec{E})$

} avec lemme entre les 2 → Dév 1

THM21 Réduct° de $u\in O(\vec{E})$

($n = \dim\vec{E}$)

[TAU] ou [MER] on choisit l'un des 2 et on le suit

B) Groupe des isométries affines :

[MER] p. 255 - 258

Déf22 : isométrie affine ⇝ Is(E)

THM23 : $f : E\to E$ isom. aff $\iff$ f affine, $\vec{f}\in O(E)$ (il suffit de mq pr $O\in E$ fixé $\overrightarrow{OA} \mapsto \overrightarrow{f(O)f(A)}$ conserve le p.s.)

Ex24 : Translat°, symétrie ⊥ / réflexions

Rem24 : toute isom est bij, Is(E) ss-grpe de (GA(E), ∘)

Déf25 : $Is(E)^+$ ⇝ déplacement / $Is(E)^-$ ⇝ anti-dép.

THM26 : $\forall f\in Is(E)$, $\exists!\, \vec{u}\in Inv(\vec{f})$, $\exists!\, g\in Is(E)$ possédant un pt fixe tq $f = t_{\vec{u}}\circ g = g\circ t_{\vec{u}}$

Appli27 : Si $Inv(\vec{f}) = \{\vec{0}\}$, f admet un unique pt invariant

Appli28 : $f\in Is(E)$. f translat° $\iff \|\overrightarrow{Mf(M)}\|$ cste indép de M.

[MER] + Poin

THM29 : · $f\in Is(E)$ est produit d'au + n+1 réflexions

· $n\geq 3 \Rightarrow \forall f\in Is(E)^+$, f est produit d'au + n+1 retournement.

161 Suite

III) Isométries du plan et de l'espace :

A) Classification en dim 2

[MER] ou [COM] [rajouter classificat° des isom vectorielles ?]

Déf30 : rotation affine du plan

Rem31 : • Thm26 montre qu'une rot aff $\neq id$ possède un unique pt inv, il est appelé centre de rotat° + dessin ? (1)

• Thm26 montre que $Is^+(\mathbb{R}^2) = \{$translat°, rotat° affines$\}$

[MER] p. 259 - 260

THM32 : Soit D, D' 2 droites sécantes en A et $s_D / s_{D'}$ réflexions d'axe D, D'. $s_{D'} \circ s_D$ est une rotat° de centre A et d'angle $2(\widehat{D, D'})$.
Réciproquement tte rotat° est la composée de 2 réflexions d'axe sécants en son centre, dont l'une est choisie arbitrairement. ← utile ?

Déf33 : réflexion glissée : $t_{\vec{u}} \circ s_D$ avec $\vec{u} \in \vec{D}$ (dessin) (2)

~~THM~~ **Prop34** : Toute antidéplacement s'écrit comme une réfl. glissée

THM35 : Une réf. glissée $f = t_{\vec{u}} \circ s_D$ possède au - 1 pt fixe $\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Exg36 : Tableau de classificat°

Inv(f)	Nature
plan	id
droite	réflex°
pt	rot $\neq id$
vide	transl ou réf glissée

B) Classification en dim 3 :

[globalement tout 13.2.4 MER]

Déf37 : rot. aff. du plan d'axe $Inv(r)$

THM38 : • $f \in Is^+(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow f$ translat° ou $f = t_{\vec{u}} \circ r_D$, $\vec{u} \in \vec{D}$ ← = vissage d'axe D de vecteur $\vec{u}$] dessin (3)

• $f \in Is^-(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow$ • $f = t_{\vec{u}} \circ s_H$ où s_H réflex° p/r au plan H, $\vec{u} \in \ldots$? (réflex° ou réfl. glissée) $\vec{u} = \vec{0}$

ou

• $f = s_{H_1} \circ s_{H_2} \circ s_{H_3}$ 3 réflexion où $H_3 \perp$ à H_1 et H_2
$= r_D \circ s_P = s_P \circ r_D$ où $D^\perp = P$ (f = sym-rotat°) [dessin ?] (4)

[MER]

Exg36 : Tableau ...] ou en annexe...

(faudrait inclure le rapport avec $Mat_B(\vec{f}) = \begin{pmatrix} \varepsilon & & \\ & \cos & -\sin \\ & \sin & \cos \end{pmatrix}$ ... fait dans [COM] flemme)

C) Isométries préservent le tétraèdre :

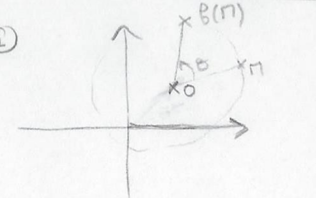
[MER] **THM37** : Toute isométrie laissant une partie finie $P = \{A_0, \ldots, A_{n-1}\}$ globalement invariant laisse fixe l'isobarycentre de ces pts.

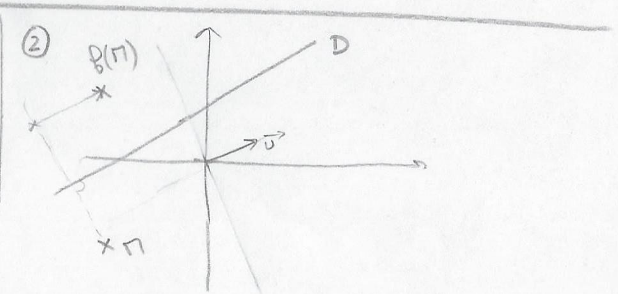
Dév2 : On considère A, B, C, D sommet du tétraèdre régulier dans $\mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{G}$ le grpe des isométries qui conservent $\{A, B, C, D\}$.

Dév 2 [PEY] Victor / [internet] Mathias

Alors $\mathcal{G} \simeq S_{\{A,B,C,D\}} \simeq S_4$
$f \longmapsto f|_{\{A,B,C,D\}}$

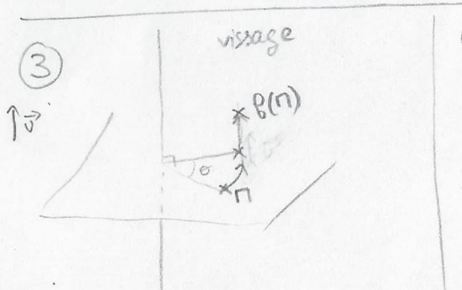
Appli : Cela nous permet de construire la table de caractères de S_4

(1) 

(2) 

Réf : [TAU] - Tauvel, Cours de géométrie
[GOU]
[MER] - Mercier, cours de géom. préparat° à l'agrég
(ou [COM] - Combes)

Pour dév : 1) gén. de $O(E)/SO(E)$: [PER] - [FRA_AP...]
2) Table de S_4 [PEY] ?

(3) 

(4)